УДК 519.21

ВАЖЛИВІ МОМЕНТНІ ОЦІНКИ ДЛЯ СХЕМИ МАКСИМУМУ

К.С. АКБАШ

Установлено обмеженість моментів нормованого макснмуму.

The limitedness of moments of normalized maximum are established.

Нехай ξ внпадкова велнчнна в $\Re^1$ з функцією розподілу $F(x)$, ξ_i незалежні копії ξ, $z_n = \max\limits_{1 \le i \le n} \xi_i$.

Покладемо

$$\tau(F) = \sup(x : F(x) < 1),$$

$$\varphi(y) = \inf\left(x \ge 1 : \frac{1}{1 - F(x)} \ge y \right), \ 1 \le y < \infty, \tag{1}$$

$$a_n = \varphi(n) = \inf\left(x \geq 1 : F(x) \geq 1 - \frac{1}{n} \right)$$

Далі будемо вважатн, що $F(x)$ неперервна, зростаюча функція і $\tau(F) = \infty$. Будемо позначатн через

$$x_+ = \max(x, 0),\ x_- = \max(-x, 0).$$

Лема 1. Нехай $x > 0$, $y > 0$. Тоді при $q \geq 1$

$$|x - y|^q \leq \left| x^q - y^q \right|. \tag{3}$$

Доведення леми 1. Досить розглянутн внпадок $q > 1$. Нехай $y \geq x > 0$, $0 < z < z = \frac{x}{y} \leq 1$. Ясио, що нерівність (3) еквівалентна такій

$$|1 - z|^q \leq 1 - z^q. \tag{4}$$

Покладемо

$$f(z) = 1 - z^q - (1 - z)^q, \qquad 0 \leq z \leq 1.$$

Тоді матнмемо

$$f`(z) = -qz^{q-1} + q(1-z)^{q-1} = \begin{cases} 0, & z = \frac{1}{2}, \\ > 0, & 0 \leq z < \frac{1}{2}, \\ < 0, & \frac{1}{2} < z \leq 1. \end{cases}$$

Такнм чиион функція $f(z)$ зростає на інтервалі $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ і спадає на $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Окрім того $f(0) = f(1) = 0$. Звідсн зрозуміло, що $f(z) \geq 0$ при $z \in (0,1)$, тобто нерівність (4) установлена. □

Лема 2. Нехай ξ внпадкова велнчнна з функцією розподілу $F(x)$, (ξ_i) незалежні копії ξ. Послідовність a_n внзначена рівністю (2), $z_n = \max\limits_{1\le i\le n} \xi_i$. Якщо внконуються умовн

$$\exists x_0, \quad 1 < x_0 < \infty: \quad \int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{x^q dF(x)}{1 - F((x^q - x_0^q)^{1/q})} < \infty, \tag{5}$$

$$\forall \varepsilon > 0: \quad \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dF(x)}{1 - F(x - \varepsilon)} < \infty \tag{6}$$

то

$$E \sup_{n\ge 1} |z_n - a_n|^q < \infty. \tag{7}$$

Доведення леми 2. 1-й крок. Випадок $q = 1$. Очевндно, що майже напевне

$$\sup_{n\ge 1} |z_n - a_n| \le \max\left(\sup_{n\ge 1} (z_n - a_n)_+, \sup_{n\ge 1} (a_n - z_n)_+ \right).$$

Такнм чнном доснть установнтн оцінкн

$$\mathrm{E} \sup_{n\ge 1} (z_n - a_n)_+ < \infty \tag{8}$$

$$\mathrm{E} \sup_{n\ge 1} (a_n - z_n)_+ < \infty. \tag{9}$$

Спочатку розглянемо оцінку (8). За означенням a_n не спадна послідовність. Тоді зрозуміло, що майже напевне

$$\sup_{n\ge 1} (z_n - a_n)_+ \le \sup_{n\ge 1} (\xi_n - a_n)_+$$

і (8) буде внплнватн із нерівності

$$E \sup_{n\ge 1} (\xi_n - a_n)_+ < \infty.$$

Звідсн ясио, що доснть показатн обмеженість інтегралу

$$\int\limits_{1}^{\infty} P\left(\sup_{n\ge 1} (\xi_n - a_n) > x \right) dx < \infty \tag{10}$$

(днв. 1, с.198).

Оцініимо зверху підінтегральннй внраз в (10)

$$P\left(\sup_{n\ge1}(\xi_n - a_n) > x\right) \le \sum_{n\ge1} P(\xi_n > x + a_n) = \sum_{n\ge1}(1 - F(x + a_n)).$$

Нагадаємо, що $a_n = \varphi(n)$, $n \ge 1$, де $\varphi(n)$ внзначена в рівності (1), і

$$1 - F(x + a_n) \le \int_{n-1}^{n}(1 - F(x + \varphi(y)))dy.$$

Такнм чнном

$$\sum_{n\ge1}(1 - F(x + a_n)) \le \int_0^\infty (1 - F(x + \varphi(y)))dy = \int_0^\infty\left(\int_{x+\varphi(y)}^\infty dF(z)\right)dy = \int_{x+1}^\infty\left(\int_0^{\frac{1}{1-F(z-x)}} dy\right)dF(z) \le \int_{x+1}^\infty \frac{dF(z)}{1 - F(z - x)}.$$

Остання умова та оцінка (5) дозволяють оціннтн інтеграл (10)

$$\int_1^\infty\left(\int_{x+1}^\infty \frac{dF(z)}{1 - F(z - x)}\right)dx = \int_2^\infty dF(z)\int_1^{z-1}\frac{1}{1 - F(z - x)}dx \le C\int_2^\infty \frac{zdF(z)}{1 - F(z - 1)} < \infty.$$

Тобто нерівність (8) установлена. Покажемо справедлнвість оцінкн (9). Як відомо ([2]), при внконанні умовн (6)

$$\lim_{n\to\infty}(z_n - a_n) = 0 \text{ м.н.}$$

Тому $\forall x > 0$

$$\left\{\sup_{n\ge1}(a_n - z_n) > x\right\} \le \bigcup_{n\ge1}\left\{a_n - z_n > x, a_{n+1} - z_{n+1} < x\right\},$$

а враховуючн, що a_n монотонно зростаюча послідовність, отрнмаємо

$$P\left(\sup_{n\ge1}(a_n - z_n) > x\right) \le \sum_{n\ge1} P(z_n < a_n - x, \xi_{n+1} > a_{n+1} - x) \le \sum_{n\ge1} F^n(a_n - x)(1 - F(a_n - x)). \quad (11)$$

Для цього, так само, як і у внпадку нерівності (8) перевірнмо обмеженість інтегралу

$$I(x_0) = \int_{x_0}^\infty P\left(\sup_{n\ge1}(a_n - z_n) > x\right)dx,$$

при деякому x_0 , $1 < x_0 < \infty$.

$$\begin{aligned} I(x_0) &\le \int_{x_0}^\infty\left[\sum_{n\ge1} F^n(a_n - x)(1 - F(a_n - x))\right]dx = \sum_{n\ge1}\int_{x_0}^\infty F^n(a_n - x)(1 - F(a_n - x))dx = \\ &= \sum_{n\ge1}\int_{-\infty}^{a_n - x_0} F^n(y)(1 - F(y))dy = \int_{-\infty}^\infty\left[\sum_{n\ge m} F^n(y)(1 - F(y))\right] \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$m = \left[\frac{1}{1 - F(x_0 + y)} \right].$$

Нерівність $a_n - x_0 \geq y$ в силу рівності $1 - \frac{1}{n} = F(a_n)$ еквівалентна такій

$$n \geq \frac{1}{1 - F(x_0 + y)}.$$

Виберемо y_0 таке, що $0 < F(y_0) < 1$. Тоді

$$\int_{-\infty}^{y_0} \sum_{n \geq m} F^n(y)(1 - F(y))dy \leq \int_{-\infty}^{y_0} \frac{1 - F(y)}{1 - F(y_0)} dy \leq \frac{1}{1 - F(y_0)} \int_{-\infty}^{\infty} |y| dF(y) < \infty. \quad (13)$$

Далі

$$\int_{y_0}^{\infty} \sum_{n \geq m} F^n(y)(1 - F(y))dy = \int_{y_0}^{\infty} (F(y))^{m+1} dy \leq \int_{y_0}^{\infty} (F(y))^{\frac{1}{1 - F(x_0 + y)}} dy. \quad (14)$$

Покладемо $\overline{F}(y) = 1 - F(y)$. Скориставшись елементарнннмн оцінкамн

$$(1 - x)^{\frac{1}{x}} \leq \exp(-1) \text{ та } \exp(-x) < \frac{1}{x},\ x > 0.$$

Заиншемо останній інтеграл в (14) так

$$\int_{y_0}^{\infty} \left((1 - \overline{F}(y))^{\frac{1}{\overline{F}(y)}} \right)^{\frac{1 - F(y)}{1 - F(x_0 + y)}} dy \leq \int_{y_0}^{\infty} \frac{1 - F(x_0 + y)}{1 - F(y)} dy \leq C \int_{t_0}^{\infty} \frac{1 - F(t)}{1 - F(t - x_0)} dt. \quad (15)$$

де $t_0 = x_0 + y_0$.

Залишається иомітнтн, що інтеграл в умові (5) ири $q = 1$ можна зобразнтн у такому внгляді:

$$\int_{y_0}^{\infty} \frac{ydF(y)}{1 - F(y - y_0)} = -\frac{y(1 - F(y))}{1 - F(y - y_0)} \Bigg|_{y_0}^{\infty} + \int_{y_0}^{\infty} \frac{1 - F(y)}{1 - F(y - y_0)} dy + \int_{y_0}^{\infty} \frac{y(1 - F(y))}{(1 - F(y - y_0))^2} dF(y - y_0)$$
(16)

Ясно, що иерший доданок сирава обмеженнñ, а другий еквівалентнннñ інтегралу (15).

Такнм чнном установлено, що обмеженість інтегралу (5) достатня для сираведлнвості оцінкн (9) ири $q = 1$.

2-й крок. Нехай $q > 1$. Прппустнмо спочатку, що $\forall k \geq 1$, $\xi_k \geq 0$ майже напевне. За лемою 1

$$\sup_{n\geq 1}|z_n - a_n|^q \leq \sup_{n\geq 1}|z_n^q - a_n^q|. \tag{17}$$

Покладемо

$$\xi_k^* = \xi_k^q,\ a_n^* = \xi_n^q,\ z_n^* = \max_{1\leq k\leq n}\xi_k^*,\ F^*(x) = P(\xi_k^* < x) = F(x^{\frac{1}{q}}).$$

Із наведеннх внще міркувань (1-й крок, $q = 1$) маємо

$$E\sup_{n\geq 1}|z_n^* - a_n^*| = E\sup_{n\geq 1}|z_n^q - a_n^q| < \infty,$$

якщо при деякому $y_0 > 0$

$$\int_{y_0}^{\infty}\frac{ydF^*(y)}{1 - F^*(y - y_0)} = \int_{y_0}^{\infty}\frac{ydF(y^{1/q})}{1 - F((y - y_0)^{1/q})} = \int_{t_0}^{\infty}\frac{t^q dF(t)}{1 - F((t^q - t_0^q)^{1/q})} < \infty. \tag{18}$$

де $t_0 = y_0^{1/q}$. Звідсп та оціиок (5) та (17) негайно внплнває (9).

Нехай тепер ξ_k довільні внпадкові велнчннн в умовах теоремн. Із відомнх елементарннх нерівностей отрнмаємо

$$\sup_{n\geq 1}|z_n - a_n|^q = \sup_{n\geq 1}|(z_n)_+ - (z_n)_- - a_n|^q \leq 2^{q-1}\left(\sup_{n\geq 1}|(z_n)_+ - a_n|^q + \sup_{n\geq 1}|(z_n)_-|^q\right). \tag{19}$$

Зрозуміло, що

$$(z_n)_+ = \max_{1\leq k\leq n}(\xi_k)_+ \tag{20}$$

а

$$(z_n)_- \leq |\xi_1|. \tag{21}$$

Із означення a_n ясно, що прп переході від в. в. (ξ_n) до в.в. $\left((\xi_n)_+\right)$ послідовність a_n не змінюється. Тому із наведеного внще та (20)-(21) одержнмо

$$E\sup_{n\geq 1}|(z_n)_-|^q < \infty,\quad E\sup_{n\geq 1}|(z_n)_+ - a_n|^q < \infty.$$

Ці оціикн разом з нерівністю (19) і завершують доведення лемн 2. □

ПОСИЛАННЯ

[1] Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и её приложения,* В. - Москва: Мир, 1984, 571с., (т.2).

[2] Barnorff-Nielsen O. *On the limit behaviour of extreme order statistics*, 1963, vol.34, №3, p. 992-1002.